

Universidad Politécnica de Madrid

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

Master Music

Jaime García Palacios

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

23 y 24 de Mayo de 2013

Índice general

1. Modelos reducidos	5
1.1. Introducción	5
1.2. Análisis dimensional	6
1.2.1. Introducción	6
1.2.2. Definiciones	6
1.2.3. Teorema de Buckingham-Pi	7
1.2.4. Aplicación práctica del teorema	8
1.2.5. Expresión de las magnitudes físicas en los sistemas $\{[M][L][T][\theta]\}$ ó $\{[F][L][T][\theta]\}$	9
1.3. Ecuación general de la hidráulica	14
1.3.1. Interpretación de los monomios adimensionales	18
1.3.2. Número de Froude	19
1.3.3. Número de Reynolds	20
1.3.4. Número de Weber	20
1.3.5. Número de Cauchy. Número de Match	20
1.3.6. Número de Euler	21
1.3.7. Expresión reducida de la Ecuación General de la Hidráulica	21
1.3.8. Importancia de los monomios adimensionales en distintos problemas	22
1.4. Semejanza hidráulica	22
1.4.1. Introducción	22
1.4.2. Tipos de semejanza	23
1.4.3. Semejanza de Froude	25

1.4.4. Semejanza de Reynolds	27
1.4.5. Relaciones de escala en problemas de semejanza	28

Modelos reducidos



1.1. Introducción

Existen muchos fenómenos en la naturaleza que, por su complejidad, no somos aún capaces de reproducirlos mediante una adecuada modelización matemática. Un caso notable, sobre el que se ha invertido e invierte mucho tiempo y dinero en investigación y desarrollo es el comportamiento de la atmósfera. Se requieren de unos 15 años de investigación y desarrollo para ser capaces de mejorar la previsión meteorológica en un día con precisión.

La evaluación del comportamiento de un diseño ante de que este sea una realidad es algo muchas veces difícilmente evaluable que requiere de los conocimientos de expertos y de una intuición, basada en la experiencia, que no siempre cuenta con una forma de expresión matemática aplicable por otras personas. La valoración de un determinado fenómeno por un grupo de expertos mejorará el diseño minimizando los problemas identificados a priori.

En muchos casos, y a pesar de la participación de expertos y de la utilización de modelos numéricos, el grado de incertidumbre que puede obtenerse en un diseño puede ser lo suficientemente elevado que puede requerirse de la construcción de un modelo a escala que reproduzca, de la forma mas fiel posible, el comportamiento real del prototipo. Denominamos **modelo** a la reproducción a escala del **prototipo**, que es el modelo a escala real.

Este tipo de modelos reducidos se justifica cuanto mayor es la incertidumbre, y sobre todo, el coste del prototipo. Los cambios en un diseño realizados en un prototipo que no funciona adecuadamente tendrán un coste elevado y pueden llegar a ser parches inadecuadamente construidos al no haberse planteado desde el inicio. En cambio, las modificaciones realizadas en un modelo a escala tienen un coste mucho más reducido y permiten la evaluación de diferentes alternativas buscando la optimización coste-funcionamiento del prototipo.

Si bien, los modelos reducidos han sido, y siguen siendo ampliamente utilizados, sobre todo en la mecánica de fluidos, requieren un profundo conocimiento del problema a estudio. En caso contrario, pueden obtenerse resultados alejados de la realidad. El modelo a escala deberá ser capaz de reproducir adecuadamente los fenómenos que se quieren modelizar y las variables que influyen sobre los mismos. Dada la imposibilidad de reproducir a escala todas las magnitudes que intervienen en un determinado

problema físico, por ejemplo la gravedad, deberán adoptarse una serie de simplificaciones que afectan al comportamiento del modelo. Es importante conocer, a priori, la influencia que estas simplificaciones tienen entre el comportamiento real del prototipo y el modelo, y cuando sea posible, evaluarlas.

Para poder afrontar el estudio de los modelos reducidos se va a introducir el concepto de análisis dimensional. Éste permite reducir el número de variables intervinientes en un problema y expresar el resto en función de las consideradas como fundamentales.

Utilizando el análisis dimensional se expresará la **Ecuación general de la hidráulica** y se obtendrán los monomios adimensionales asociados a los principales fenómenos intervinientes en los distintos problemas físicos relacionados con la mecánica de fluidos.

Del estudio del diseño de un prototipo dado, se determinará el comportamiento predominante en el fluido. Sobre este comportamiento se elegirá la semejanza de escalas más adecuada para la representación del modelo. Esta semejanza se establece a través del monomio adimensional predominante anteriormente obtenido. Finalmente, se evaluará la influencia asociada a la adopción de esta simplificación antes de proceder a la construcción del modelo. Este proceso se detalla en el apartado 1.4

1.2. Análisis dimensional

1.2.1. Introducción

El análisis dimensional fue introducido, de forma teórica, por Lord Rayleigh en 1877 en el libro *'The Theory of Sound'* sin embargo este ha sido atribuido a Buckingham en 1915 por la publicación *'Model experiments and the form of empirical equations'*, siendo actualmente conocido como el **Teorema de Buckingham Pi**, proviniendo el Pi de los números adimensionales contenidos en el desarrollo matemático del mismo.

El análisis dimensional permite expresar una serie de magnitudes físicas en función de otras que consideramos fundamentales.

1.2.2. Definiciones

Consideramos una **magnitud física** a la propiedad medible de un elemento o conjunto físico. Hay que tener en cuenta que hay propiedades, como la dureza, que son comparables, pero no medibles. Ésta no constituiría una magnitud física.

Cuando algo es medible lo hacemos en un sistema de referencia, pero este no tiene porque ser único. Por ejemplo, sean (L_1, L_2, \dots, L_p) una medidas de longitud observables. Sean L_u y L'_u dos medidas de longitud distintas que tomaremos como referencia.

$$u_1 = \frac{L_1}{L_u} \quad (1.1)$$

expresa el número de veces que L_1 contiene la unidad de referencia L_u , mientras que:

$$u'_1 = \frac{L_1}{L'_u} \quad (1.2)$$

expresa el número de veces que L_1 contiene la unidad de referencia L'_u .

Como L_1 no varía independientemente de la unidad adoptada como referencia:

$$L_1 = u_1 L_u = u'_1 L'_u \quad \rightarrow \quad u'_1 = u_1 \frac{L_u}{L'_u} \quad (1.3)$$

Por tanto:

$$\frac{L_u}{L'_u} \quad (1.4)$$

representa la transformación que nos permite pasar de un sistema de coordenadas al otro.

Dentro de las magnitudes físicas existen una serie de magnitudes únicamente dependientes de sí mismas a las que llamaremos **magnitudes fundamentales** pudiendo el resto de las magnitudes expresarse en función de éstas. A éstas últimas las denominaremos **magnitudes derivadas**.

Las unidades fundamentales son las que, en cada problema, quieran tomarse como tales, y pueden estar formadas por cualquier conjunto de magnitudes físicas independientes entre sí. Es decir, puede ser cualquier conjunto de magnitudes físicas siempre que cumplan el criterio de independencia lineal entre ellas cuando se encuentran expresadas sobre el mismo sistema de referencia. Las demás magnitudes físicas se expresarán en función de las elegidas.

En un movimiento uniforme la velocidad es una expresión de la distancia recorrida en función del tiempo que se tarda en recorrer dicha distancia. Por tanto, se tendrán 2 magnitudes fundamentales, distancia (L) y tiempo (t), expresándose la magnitud derivada (v) como:

$$v = \frac{L}{t} \quad (1.5)$$

Sin embargo, cuando se trabaja con la distancia entre cuerpos en el espacio estamos acostumbrados a referirnos a ella como '*años-luz*', lo que en realidad constituye un ejemplo de expresión de la distancia como magnitud derivada de las fundamentales dadas por la velocidad de la luz (c) y el tiempo (t), en la forma:

$$L = c \cdot t \quad (1.6)$$

1.2.3. Teorema de Buckingham-Pi

Sean $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ las n magnitudes físicas relevantes del problema a estudio y que se relacionan entre sí mediante un conjunto conocido de ecuaciones homogéneas. Esta relación puede expresarse de la forma:

$$F(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = 0 \quad \text{de forma equivalente} \quad q_1 = f(q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (1.7)$$

Si el sistema formado por las n variables tiene dimensión k , existe, al menos, un conjunto k de variables independientes, y el resto de variables, dado por $j = n - k$ puede expresarse en función de una serie de j monomios adimensionales¹ $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})$. En este caso, la relación funcional dada en la ecuación (1.7) puede expresarse de forma más compacta como:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0 \quad \text{de forma equivalente} \quad \Pi_1 = \phi(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (1.8)$$

Téngase en cuenta que el sistema formado por las k variables independientes no tiene por que ser único, aunque si debe cumplir la condición de independencia lineal entre ellas.

1.2.4. Aplicación práctica del teorema

Dado un problema a estudio, deben seguirse los siguientes pasos:

- Identificar todas las magnitudes físicas existentes en el modelo
- Elegir las magnitudes física más relevantes en función de aquellos aspectos que se quieren analizar en el modelo. Este paso requiere un profundo conocimiento del comportamiento físico. Habrá que pensar en las posibles restricciones del problema y la posibilidad, o no, de que pueda variar las diferentes magnitudes físicas de forma independiente.

Si estudiamos el peso de un objeto $P = \rho g V$, sólo podemos actuar sobre dos parámetros, la masa ρ y el volumen V , a no ser que seamos capaces de cambiar la gravedad. Incluso puede ser posible que no podamos variar la masa, como puede ser el caso de un modelo hidráulico donde la existencia de un volumen de agua importante en circulación no pueda sustituirse por otro fluido.

- Expresar las n magnitudes físicas del problema en función del conjunto de variables fundamentales $\{[M][L][T][\theta]\}$ ó $\{[F][L][T][\theta]\}$, donde $[M]$ es masa, $[L]$ longitud $[T]$, tiempo, $[\theta]$ temperatura y $[F]$ es fuerza.
- Seleccionar dentro de las magnitudes físicas más relevantes, el conjunto linealmente independiente de dimensión k sobre el que se expresarán las demás ($j = n - k$) variables como monomios adimensionales.
- Calcular los Π_j monomios adimensionales. Para ello basta con trabajar sobre una matriz con todas las magnitudes físicas del problema, e ir realizando transformaciones hasta conseguir que las k magnitudes elegidas como fundamentales formen una matriz unitaria. Los coeficientes asociados al resto de las j variables son las potencias que las relacionan a esas k magnitudes.
- Comprobar la adimensionalidad de los monomios para evitar posibles errores.
- Expresar los monomios en función de la magnitud que se ha considerado como relevante. Si esta es Π_1 :

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (1.9)$$

¹Un monomio adimensional es un producto de magnitudes, fundamentales o derivadas, cuyo resultado no tiene dimensión

- Realizar una interpretación física del resultado
- Asegurarse de la independencia de cada uno de los monomios. Esto implica que la variación de uno de ellos no afecta al resto que permanecerán constantes.
- Finalmente, comparar los resultados de los distintos ensayos.

1.2.5. Expresión de las magnitudes físicas en los sistemas $\{[M][L][T][\theta]\}$ ó $\{[F][L][T][\theta]\}$

Magnitud física	Símbolo	Fórmula	Ud (SI)	$\{[M][L][T][\theta]\}$				$\{[F][L][T][\theta]\}$			
				M	L	T	θ	F	L	T	θ
Longitud	L	L	m		1				1		
Area	A	L^2	m^2		2				2		
Volumen	V	L^3	m^3		3				3		
Tiempo	t	t	s			1					1
Masa	m	m	kg	1				1	-1	2	
Velocidad	v	L/t	m/s		1	-1			1	-1	
Aceleración	a	L/t^2	m/s^2		1	-2			1	-2	
Fuerza	F	$m \cdot a$	N	1	1	-2		1			
Presión	p	F/A	Pa	1	-1	-2		1	-2		
Tensión superficial	σ	F/L	N/m	1		-2		1	-1		
Densidad	ρ	m/L^3	kg/m^3	1	-3			1	4	2	
Peso específico	γ	F/L^3	N/m^3	1	-2	-2		1	-3		
Viscosidad	μ	$p \cdot t$	$Pa \cdot s$	1	-1	-1		1	-2	1	
Viscosidad cinemática	ν	$\mu \cdot \rho$	m^2/s		2	-1			2	-1	
Mod. elasticidad volum.	E_v	F/A	Pa	1	-1	-2		1	-2		
Trabajo	τ	$F \cdot t$	J	1	2	-2		1	1		
Energía	E	$F \cdot t$	J	1	2	-2		1	1		
Potencia	P	E/t	W	1	2	-3		1	1	-1	
Momento	M	$F \cdot L$	$m \cdot t$	1	2	-2		1	1		
Vel. angular	ω	$rps/2$	rad			-1				-1	
Temperatura	T	T	$^{\circ}$			1					1
Calor específico	C_p			1	1	-3	-1	1		-1	-1
Coef. expansión térmica	α	$1/T$	$^{\circ-1}$				-1				-1

Tabla 1.1: Expresión de las magnitudes físicas en 2 sistemas de unidades

Ejemplo: Análisis dimensional de un péndulo

Sea un péndulo de masa m situado al final de una cuerda sin peso de extensión L . Estudiar su movimiento mediante el análisis dimensional.

1. Identificar las magnitudes físicas que intervienen en el sistema:

- L longitud de la cuerda (m)
- m Masa del péndulo (kg)
- g Gravedad de la tierra (m/s^2)
- x Desplazamiento horizontal del péndulo respecto de su posición de equilibrio (m)
- t Tiempo de la oscilación (periodo) (s)

2. A continuación se eligen las magnitudes fundamentales en función del conocimiento de la física del problema. En este caso se toman L, m, g .

3. Se expresan todas las magnitudes en un sistema $\{[M][L][T]\}$.

Magnitud física	Símbolo	Ud	M	L	T
Longitud	L	m		1	
Gravedad	g	m/s^2		1	-2
Masa	m	kg	1		
Desplazamiento	x	m		1	
Tiempo	t	m			1

Tabla 1.2: Expresión en $\{[M][L][T]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en el problema

4. Comprobar que las k magnitudes fundamentales son independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \tag{1.10}$$

5. Calcular los coeficientes de las $n - k$ magnitudes fundamentales derivadas en función de las k fundamentales. Para ello, podemos resolver un sistema de ecuaciones entre las magnitudes fundamentales y cada una de las derivadas, o bien aplicar una reducción del tipo Gauss hasta conseguir una matriz unidad entre las magnitudes fundamentales. En este caso los coeficientes que se obtienen en las magnitudes derivadas expresan la potencia de la magnitud fundamental asociada necesaria para mantener la dimensionalidad del sistema.

A continuación se muestra como se obtiene el monomio adimensional del tiempo en el sistema de referencia dado por $[M][L][g]$ mediante la resolución de un sistema.

- a) Tenemos el tiempo expresado en $[M][L][T]$ como $t = [M]^0[L]^0[T]^1$ siendo las potencias los correspondientes coeficientes en la fila del tiempo en la tabla 1.2.
- b) Queremos ponerlo en función de un sistema en la forma $t = [L]^a[G]^b[M]^c$. Para ello es necesario resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0 \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \\ 0 \cdot a + -2 \cdot b + 0 \cdot c = 1 \end{array} \right\} \rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{-1}{2}, \quad c = 0 \tag{1.11}$$

siendo los coeficientes del sistema los valores por columnas dados en la tabla 1.2 para las magnitudes elegidas como fundamentales. Los coeficientes independientes son los correspondientes a la fila donde tenemos el tiempo.

- c) Por tanto, t queda expresado como $t = [L]^{\frac{1}{2}}[G]^{\frac{-1}{2}}[M]^0 = \sqrt{\frac{L}{g}}$ en el nuevo sistema de referencia.
- d) Finalmente, el monomio adimensional correspondiente se obtiene como:

$$\Pi = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{g}}} = t\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (1.12)$$

cuya adimensionalidad es fácilmente comprobable

Algebraicamente esto es similar a realizar una reducción de Gauss sobre la matriz de magnitudes elegidas como fundamentales hasta reducirla a la matriz unidad manteniendo las transformaciones en el resto de magnitudes físicas del problema. Los coeficientes obtenidos en las magnitudes derivadas serán las potencias correspondientes a las magnitudes fundamentales unitarias obtenidas en la correspondiente columna. A continuación se muestra esta forma de resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} L & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 1 & -2 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Para pasar de la matriz de la izquierda a la de la derecha se han realizado las operaciones siguientes:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de ella misma con la tercera multiplicada por $1/2$.
- La tercera columna es ella misma multiplicada por $-1/2$.

6. Expresar las magnitudes derivadas en función de las fundamentales.

Magnitud física	Símbolo	m	L	g	Expresión	Nº adimensional
Longitud	L		1		$m^0 L^1 g^0$	
Gravedad	g			1	$m^0 L^0 g^1$	
Masa	m	1			$m^1 L^0 g^0$	
Desplazamiento	x		1		$m^0 L^1 g^0$	$\Pi_1 = xL^{-1}$
Tiempo	t		0.5	-0.5	$m^0 L^{1/2} g^{-1/2}$	$\Pi_2 = tL^{-1/2} g^{1/2}$

Tabla 1.3: Expresión en $\{[m][L][g]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en el péndulo

Téngase en cuenta que como la matriz unitaria que se ha conseguido tenía el 1 correspondiente a la magnitud fundamental m en la primera columna, los coeficientes de esta columna serán los

correspondientes a la masa, la segunda columna son los coeficientes de la longitud y la tercera los asociados a la gravedad.

7. Obtención de los número adimensionales. Lo que se expresa en la última columna de la tabla 1.3 La expresión como número adimensional Π_1 del valor del desplazamiento x implica que:

$$\Pi_1 = \frac{x}{m^0 L^1 g^0} \tag{1.14}$$

es adimensional. El valor de los coeficientes (m, l, g) de la última columna se corresponden con el obtenido en la columna anterior cambiados de signo. También se podría haber tomado Π_1 como $1/\Pi_1$ o incluso multiplicado por un valor numérico. En todos los casos seguiría siendo una magnitud adimensional.

8. Comprobación de que estos números son realmente adimensionales.

- $\Pi_1 = \frac{x}{L} = \frac{m}{m}$ es adimensional.
- $\Pi_2 = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{g}}} = \frac{s}{\sqrt{\frac{m}{m/s^2}}}$, que también es adimensional.

9. Expresión de todos los monomios adimensionales en función de uno de ellos.

En este caso, si expresamos Π_2 en función de Π_1 , se obtiene un gráfico como el de la figura 1.1 que representa la oscilación del péndulo.

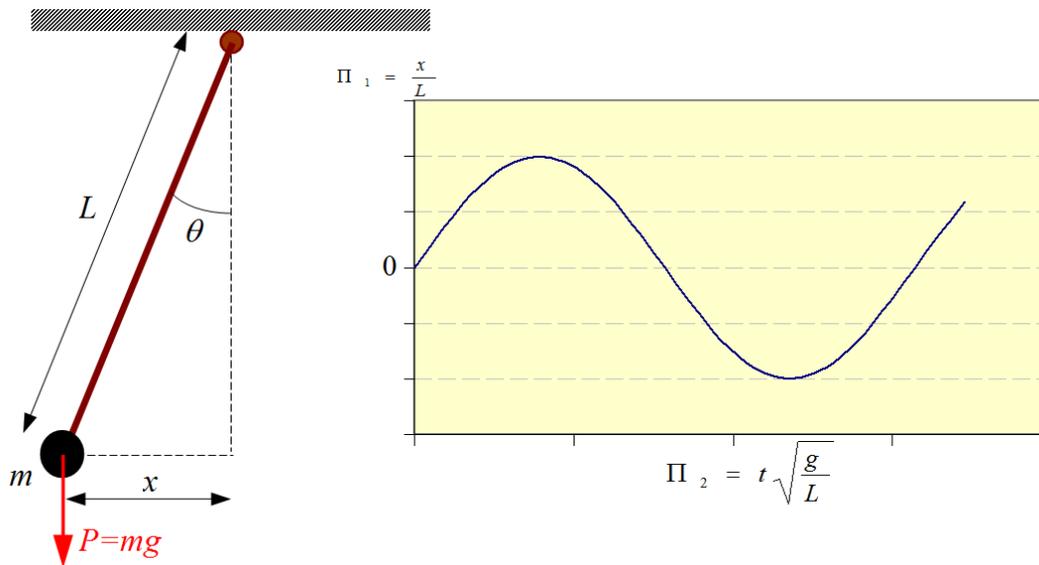


Figura 1.1: Análisis dimensional de un sistema pendular

Matemáticamente lo que estamos planteando es una función:

$$f(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{L}}t = \Phi\left(\frac{x}{L}\right) = \Phi(\text{sen } \theta) \tag{1.15}$$

La dificultad radica en darse cuenta que el término x/L representa $\text{sen } \theta$, pero eso es lo que implica el tener un conocimiento físico del problema planteado. Si despejamos el tiempo de la

ecuación 1.15, se obtiene:

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \Phi(\sin \theta) \quad (1.16)$$

Si comparamos este valor con la oscilación de un péndulo dada por:

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \sin \theta \quad (1.17)$$

Vemos que ambas ecuaciones son coincidentes. La proporcionalidad adimensional 2π existente entre $\Phi(\sin \theta)$ y $2\pi \sin \theta$ es un resultado lógico cuando se trabaja con monomios adimensionales.

10. Interpretación física, siempre que sea posible, de estos números.

Observando Π_1 , vemos que el desplazamiento horizontal del péndulo es directamente proporcional a la longitud de la cuerda y no depende de nada más.

En el caso de Π_2 ya se ha realizado en el punto anterior, a través de su relación con Π_1

Ejemplo: Análisis dimensional en una bomba

La potencia P producida por una turbina es función de la densidad del fluido ρ , la velocidad de rotación n , el diámetro del rodete D y la altura de salto neto H . Obtenga mediante análisis dimensional la expresión de esta dependencia.

En la tabla 1.4 se refleja cada una de las variables del problema en el sistema $\{[M][L][T]\}$. Se toman como magnitudes relevantes las dadas por D , ρ y n , y como derivadas P , H y g . Para obtener la potencia se tiene en cuenta sus unidades, en la forma:

$$P \text{ (trabajo) } W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{x} = \frac{kg \frac{m}{s^2} m}{s} \quad (1.18)$$

Las revoluciones son una unidad de $1/T$. El resto de parámetros es muy sencillo y se expresa directamente.

Magnitud física	Símbolo	M	L	T
Diámetro	D		1	
Densidad	ρ	1	-3	
Vel. rotación	n			-1
Potencia	P	2	1	-3
Salto neto	H	0	1	0
Gravedad	g	0	1	-2

Tabla 1.4: Expresión en $\{[M][L][T]\}$ de las magnitudes físicas del problema

A continuación se comprobará que las k magnitudes fundamentales son independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \tag{1.19}$$

Se obtienen los números adimensionales

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Las transformaciones realizadas han sido:

- La primera columna es la suma de ella misma con la segunda multiplicada por 3.
- La segunda columna se queda como esta.
- La tercera columna es ella misma cambiada de signo.

Finalmente, los número adimensionales obtenidos se reflejan en la tabla 1.5.

Magnitud física	Símbolo	ρ	D	n	
Diámetro	D		1		
Densidad	ρ	1			
Vel. rotación	n			1	
Potencia	P	2	1	3	$\frac{P}{D^5 \rho n^3}$
Salto neto	H	0	1	0	$\frac{H}{D}$
Gravedad	g	0	1	-2	$\frac{g}{Dn^2}$

Tabla 1.5: Expresión en $\{[\rho][D][n]\}$ de las magnitudes físicas del problema, y número adimensionales

1.3. Ecuación general de la hidráulica

A continuación va a exponerse como a través del análisis dimensional se llega a la expresión de la Ecuación General de la Hidráulica.

Las variables que intervienen en la hidráulica, son $n = 11$ y se pueden identificar en:

- Dimensiones:

- Alto: a
 - Ancho: b
 - Largo: c
 - Rugosidad: k , asociado a fenómenos de contorno y turbulencia
- Variable cinemática, que puede ser la Velocidad: v o el caudal Q . Ambas ya estarían relacionadas por las magnitudes geométricas definidas
- Propiedades de los fluidos:
 - Peso específico: γ
 - Densidad: ρ
 - Viscosidad: μ
 - Tensión superficial: σ
 - Compresibilidad, o módulo de elasticidad volumétrico: E_v
 - Presión: p

La ecuación general de la hidráulica queda entonces:

$$F(a, b, c, k, v, \gamma, \rho, \mu, \sigma, E_v, p) = 0 \quad (1.21)$$

En la tabla 1.6 se van a expresar estas magnitudes en un sistema de referencia $\{[M][L][T]\}$ de tres dimensiones $k = 3$, ya que la temperatura no se considera relevante, ni se necesitan magnitudes asociadas a la carga eléctrica.

Magnitud física	Símbolo	Ud	M	L	T	F	L	T
Alto	a	m		1			1	
Velocidad	v	m/s		1	-1		1	-1
Densidad	ρ	kg/m^3	1	-3		1	-4	2
Ancho	b	m		1			1	
Largo	c	m		1			1	
Rugosidad	k	m		1			1	
Peso específico	γ	N/m^3	1	-2	-2	1	-3	
Viscosidad	μ	$Pa \cdot s$	1	-1	-1	1	-2	1
Tensión superficial	σ	N/m	1		-2	1	-1	
Mod. elasticidad volum.	E_v	Pa	1	-1	-2	1	-2	
Presión	p	Pa	1	-1	-2	1	-2	

Tabla 1.6: Expresión en $\{[M][L][T]\}$ y $\{[F][L][T]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en la hidráulica

En las tres primera filas de esta tabla, se han dispuesto las magnitudes físicas que se consideran fundamentales en un sistema hidráulico. Es aquí donde interviene el conocimiento de los procesos que se quieren modelizar para poder elegir adecuadamente estas variables. En este caso se han elegido una dimensión (calado y), la velocidad del fluido (v) y la densidad (ρ).

Se comprueba que estas tres magnitudes, expresadas en $\{[M][L][T]\}$ forman un sistema linealmente independiente entre si:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad (1.22)$$

Por tanto, pueden ser elegidas como magnitudes fundamentales, sobre las que expresar las restantes $j = n - k = 11 - 3 = 8$.

Existen diversas formas de cálculo para resolver la transformación del sistema desde $\{[M][L][T]\}$ a $\{[y][v][\rho]\}$, cuando existen, como en este caso, pocas magnitudes básicas y muchas dependientes, lo más fácil es realizar una reducción del tipo Gauss aplicando los cambios al resto de la matriz ampliada.

Es decir, si partimos de la matriz de la izquierda en la ecuación 1.23, correspondiente a los coeficientes de la tabla 1.6, y haciendo las transformaciones siguientes:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la segunda y terceras.
- La tercera columna es ella misma pero cambiada de signo.

se llega a la matriz central, donde ya tenemos 2 filas de la matriz unitaria. Para conseguir la tercera debemos dejar un 1 en la primera columna y ceros en las demás. Para ello hacemos una nueva transformación dada por:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la primera columna multiplicada por 3 y ella misma.
- La tercera columna se queda como esta.

$$\begin{array}{l}
 a \\
 v \\
 \rho \\
 b \\
 c \\
 k \\
 \gamma \\
 \mu \\
 \sigma \\
 E_v \\
 p
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -1 \\
 1 & -3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & -2 & -2 \\
 1 & -1 & -1 \\
 1 & 0 & -2 \\
 1 & -1 & -2 \\
 1 & -1 & -2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 1 & -3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & -4 & 2 \\
 1 & -2 & 1 \\
 1 & -2 & 2 \\
 1 & -3 & 2 \\
 1 & -3 & 2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & -1 & 2 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 \\
 1 & 0 & 2
 \end{bmatrix}
 \quad (1.23)$$

De esta forma se obtienen los coeficientes que nos permiten expresar las $n - k$ magnitudes no fundamentales a partir las k fundamentales. Estas expresiones se reflejan en la tabla 1.7.

Téngase en cuenta que como la matriz unitaria que se ha conseguido tenía el 1 correspondiente a la magnitud fundamental ρ en la primera columna, los coeficientes de esta columna serán los correspondientes a la densidad, la segunda columna son los coeficientes del calado y la tercera los asociados a la velocidad.

Magnitud física	Símbolo	ρ	y	v	Expresión	Nº adimensional
Alto	a		1		$\rho^0 a^1 v^0$	
Velocidad	v			1	$\rho^0 a^0 v^1$	
Densidad	ρ	1			$\rho^1 a^0 v^0$	
Ancho	b		1		$\rho^0 a^1 v^0$	$\Pi_1 = ba^{-1}$
Largo	c		1		$\rho^0 a^1 v^0$	$\Pi_2 = xa^{-1}$
Rugosidad	k		1		$\rho^0 a^1 v^0$	$\Pi_3 = ka^{-1}$
Peso específico	γ	1	-1	2	$\rho^1 a^{-1} v^2$	$\Pi_4 = \gamma \rho^{-1} a^1 v^{-2}$
Viscosidad	μ	1	1	1	$\rho^1 a^1 v^1$	$\Pi_5 = \mu \rho^{-1} a^{-1} v^{-1}$
Tensión superficial	σ	1	1	2	$\rho^1 a^1 v^2$	$\Pi_6 = \sigma \rho^{-1} a^{-1} v^{-2}$
Mod. elasticidad volum.	E_v	1		2	$\rho^1 a^0 v^2$	$\Pi_7 = E_v \rho^{-1} v^{-2}$
Presión	p	1	0	2	$\rho^1 a^0 v^2$	$\Pi_8 = p \rho^{-1} v^{-2}$

Tabla 1.7: Expresión en $\{[\rho][y][v]\}$ de las magnitudes físicas intervinientes en la hidráulica

La expresión como número adimensional Π_1 del valor del ancho b implica que:

$$\Pi_1 = b \rho^l a^m v^n \quad (1.24)$$

es adimensional. Para ello el valor de los coeficientes (l, m, n) se corresponde con el obtenido anteriormente cambiado de signo.

Este es el criterio aplicado en la última columna de la tabla 1.7 para los 8 parámetros derivados.

La ecuación dada en (1.21) se transforma en:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8) = 0 \tag{1.25}$$

Con lo que hemos reducido un sistema de 11 variables a 8, lo que tiene una gran importancia en el cálculo.

Si se hubiera partido de un sistema $\{[F][L][T]\}$ en vez de $\{[M][L][T]\}$ el resultado hubiera sido el mismo. Los coeficientes correspondientes al sistema $\{[F][L][T]\}$ de las mismas magnitudes dadas en la tabla 1.6 se corresponden con los mostrados en la matriz de la izquierda de la ecuación(1.26). Para llegar a la matriz de la derecha se realizan las transformaciones:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la primera columna multiplicada por 4 y ella misma.
- La tercera columna es la suma de la primera columna multiplicada por -2 y ella misma.

para conseguir la matriz central. De esta a la matriz de la derecha hacemos las transformaciones:

- La primera columna se queda como esta.
- La segunda columna es la suma de la tercera columna y ella misma.
- La tercera columna es ella misma cambiada de signo.

$$\begin{array}{l}
 a \\
 v \\
 \rho \\
 b \\
 c \\
 k \\
 \gamma \\
 \mu \\
 \sigma \\
 E_v \\
 p
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -1 \\
 1 & -4 & 2 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & -3 & 0 \\
 1 & -2 & 1 \\
 1 & -1 & 0 \\
 1 & -2 & 0 \\
 1 & -2 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & -1 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & -2 \\
 1 & 2 & -1 \\
 1 & 3 & -2 \\
 1 & 2 & -2 \\
 1 & 2 & -2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & -1 & 2 \\
 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 2 \\
 1 & 0 & 2
 \end{bmatrix}
 \tag{1.26}$$

1.3.1. Interpretación de los monomios adimensionales

Antes de proceder a la interpretación de cada uno de los monomios adimensionales se van a introducir las fuerzas actuantes en los problemas hidráulicos, ya que a través de ellas podemos realizar una interpretación física de los mismos. Estas fuerzas son:

F_g	Fuerzas de gravedad	$F_g = m \cdot g = \rho L^3 g$
F_p	Fuerzas de presión	$F_p = A \cdot \Delta p = \Delta p L^2$
F_μ	Fuerzas de viscosidad	$F_\nu = \mu \frac{dv}{dy} A = \mu \frac{v}{L} L^2 = \mu v L = \rho \nu v L$
F_E	Fuerzas debidas a la elasticidad (compresibilidad)	$F_E = E_v \cdot A = E_v \cdot L^2$
F_σ	Fuerzas debidas a la tensión superficial	$F_\sigma = \sigma L$
F_I	Fuerzas de inercia	$F_I = m \cdot g = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^4 T^{-2} = \rho v^2 L^2$

Hay que tener en cuenta que un monomio sigue siendo adimensional si tomamos el valor inverso del mismo.

Los dos primeros monomios ($\Pi_1 = b/a$) y ($\Pi_2 = c/a$) son una simple relación de magnitudes geométricas.

El tercero ($\Pi_3 = k/a$) expresa la rugosidad relativa. Este parámetro aparece, por ejemplo, en la ecuación de Darcy-Weisbach cuando quiere evaluarse la f de Darcy. Suele ser difícil en un modelo a escala el conseguir un material capaz de mantener la rugosidad relativa, especialmente si la relación de escalas es elevada.

Para el resto de monomios existe una interpretación física muy interesante basada en la relación de fuerzas actuante predominante en cada uno de los modelos hidráulicos.

1.3.2. Número de Froude

El monomio:

$$\Pi_4 = \frac{\gamma a}{\rho v^2} = \frac{\rho g a}{\rho v^2} = \frac{g a}{v^2} = \frac{1}{F^2} \quad (1.27)$$

siendo F^2 el número de Froude al cuadrado. Este número es fundamental en la hidráulica para la separación del tipo de régimen en la circulación del agua en lámina libre.

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y gravedad, así:

$$\frac{F_I}{F_g} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho g L^3} = \frac{v^2}{g \cdot L} \quad (1.28)$$

Este número es debido a los estudios realizados por William Froude para determinar la resistencia de los barcos al avance entre las olas. Para ello realiza experimentos con placas arrastradas por el agua.

En el caso de los buques la magnitud geométrica de longitud es la eslora del buque, mientras que en la hidráulica de canales se considera el calado y .

El término $c^2 = g \cdot y$, siendo y el calado, se corresponde además con la celeridad de una onda de gravedad en superficie libre y aguas poco profundas. Por tanto el Número de Froude nos da la relación entre la velocidad del fluido (v) y la velocidad de la onda de gravedad (c) y justifica el comportamiento de los frentes de onda en canales.

1.3.3. Número de Reynolds

El monomio:

$$\Pi_5 = \frac{\mu}{\rho a v} = \frac{\nu}{a v} = \frac{1}{R_e} \quad (1.29)$$

siendo R_e el número de Reynolds.

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y viscosidad, así:

$$\frac{F_I}{F_v} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho \nu v L} = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad (1.30)$$

Este número es debido a Osborne Reynolds (1882), aunque la relación dinámica de fuerzas es debida a Lord Rayleigh 10 años más tarde.

En el caso de tuberías este número se expresa como $R_e = \frac{v \cdot D}{\nu}$ donde el diámetro D sustituye a la magnitud geométrica de longitud.

1.3.4. Número de Weber

El monomio:

$$\Pi_6 = \frac{\sigma}{\rho a v^2} = \frac{1}{W_e^2} \quad (1.31)$$

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y tensión superficial, así:

$$\frac{F_I}{F_\sigma} = \frac{\rho v^2 L^2}{\sigma L} = \frac{v^2}{\frac{\sigma}{\rho L}} = W_e^2 \quad (1.32)$$

siendo $W_e = \frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}}$ el número de Weber.

Este número es debido a Moritz Weber, que desarrollo las leyes de semejanza moderna. Una aplicación práctica, donde este número es importante, es el estudio del frente de onda de una lámina de agua muy fina que fluye sobre una superficie. Este caso se produce en las playas sin pendiente donde un pequeño frente avanza por encima de un lámina de agua muy fina, sin apenas calado.

1.3.5. Número de Cauchy. Número de Match

El monomio:

$$\Pi_7 = \frac{E_v}{\rho v^2} = \frac{1}{C_a} = \frac{1}{M_a^2} \quad (1.33)$$

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y la elásticas, así:

$$\frac{F_I}{F_E} = \frac{\rho v^2 L^2}{E_v L^2} = \frac{v^2}{E_v / \rho} = c_a = M_a^2 \quad (1.34)$$

siendo C_a es el numero de Cauchy, y M_a el número de Match. Este último se utiliza en gases compresibles con comportamiento adiabático.

El número de Cauchy se utiliza en problemas de golpe de ariete donde la compresibilidad del fluido es importante.

Este número es debido a Ernst Mach, y es muy utilizado en la mecánica de fluidos aplicada al campo de la aeronáutica, ya que expresa la relación entre la velocidad, y la velocidad del sonido en el medio. Ello permite separar los flujos entre subsónico, sónico y supersónico en función de que sean inferiores, iguales o superiores a la velocidad el sonido en el medio.

1.3.6. Número de Euler

El monomio:

$$\Pi_8 = \frac{p}{\rho v^2} = \frac{1}{2E_u^2} \quad (1.35)$$

Este número puede obtenerse también por la relación entre las fuerzas de inercia y presión, así:

$$\frac{F_I}{2F_p} = \frac{\rho v^2 L^2}{2\Delta p L^2} = \frac{v^2}{2\frac{\Delta p}{\rho}} = E_u^2 \quad (1.36)$$

siendo $E_u = \frac{v}{\sqrt{2(\Delta p/\rho)}} = \frac{v}{\sqrt{2g(\Delta p/\gamma)}}$ el número de Euler.

Este número es debido a Leonhard Euler. Este número permanece constante para cualquier forma de contorno en un fluido en el que únicamente actúen las fuerzas de inercia y presión.

Al valor $C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} = \frac{1}{E_u^2}$ se le conoce como **coeficiente de presión**.

Si el Δp se mide tomando como referencia la presión de vapor p_v se obtiene $C_a = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho v^2}$ conocido como el **número de cavitación**

1.3.7. Expresión reducida de la Ecuación General de la Hidráulica

Tras el análisis dimensional llevado a cabo, junto con la interpretación física de los distintos parámetros, la ecuación (1.25) puede expresarse como:

$$\Phi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{k}{a}, F, R_e, W_e, M_a, E_u\right) = 0 \quad (1.37)$$

Ahora bien, si lo que estamos estudiando es un problema donde la tensión superficial, ni la cavitación, ni el flujo supersónico son relevantes, se pueden eliminar los tres últimos parámetros, reduciéndose la ecuación (1.37) a:

$$\Phi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{k}{a}, F, R_e\right) = 0 \quad (1.38)$$

Si estudiamos un problema de circulación en tuberías en presión, donde no existe la superficie libre, también podría eliminarse el término debido al número de Froude. Lo mismo ocurre si estudiamos el movimiento bajo el agua de un submarino a profundidad suficiente para este desplazamiento no produzca una perturbación en la superficie libre.

En el caso de circulación en lámina libre, por ejemplo en canales, el efecto de la viscosidad es despreciable, siempre que el número de Reynolds sea elevado, y por tanto puede eliminarse ese término de la ecuación.

En todos los casos anteriormente enunciados, y aplicando las simplificaciones expuestas se ha conseguido reducir la Ecuación General de la Hidráulica a 4 parámetros fundamentales frente a los 11 de partida.

La importancia de esta reducción radica en el número de casos a estudiar si queremos conocer la influencia de la variación de una de las magnitudes intervinientes en el problema sobre las demás. Supongamos que de cada magnitud hagamos 5 variaciones. Con el sistema de 11 variables tendríamos $5^{11} = 48,828,125$ casos a estudiar, mientras que con un sistema de 4 magnitudes, este número sería $5^4 = 625$ casos.

1.3.8. Importancia de los monomios adimensionales en distintos problemas

La tabla 1.8 muestra los cinco últimos números adimensionales, con su nombre asociado, la relación de fuerzas implicadas en su obtención y el campo de la hidráulica donde su consideración es más relevante.

Magnitud física	Definición	Magnitudes relacionadas	Importancia hidráulica
Nº Froude	$F^2 = \frac{v^2}{c^2}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{gravedad}}$	Superficie libre
Nº Reynolds	$R_e = \frac{\rho D v}{\nu}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{viscosidad}}$	Siempre
Nº Weber	$W_e = \frac{\rho v L}{\gamma}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{tension\ superficial}}$	Superficie libre
Nº Mach	$M_a = \frac{v}{a}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{elastica}}$	Fluidos compresibles
Nº Euler	$C_a = \frac{p-p_0}{\rho v}$	$\frac{F_{inercia}}{F_{presion}}$	Cavitación

Tabla 1.8: Números adimensionales destacables en la hidráulica

1.4. Semejanza hidráulica

1.4.1. Introducción

Como ya se ha dicho antes, el coste de construcción de algunas obras es muy elevado, y el comportamiento real ante determinadas situaciones puede poseer un grado de incertidumbre que puede verse muy reducido con la modelización previa a la construcción de un modelo a escala.

Supongamos que queremos construir el aliviadero de una presa. Este se ha previsto para la diferentes hipótesis de funcionamiento. Por ejemplo, en la avenida de proyecto, avenida extrema, actuación de los desagües de fondo y los intermedios. Si este aliviadero no es de labio fijo sino que funciona sin compuertas, la complejidad es aún mayor. El problema puede agravarse si tiene mas de un vano, ya

que el caudal desaguado además de depender de la apertura de compuerta y del nivel del embalse es también función de la apertura de los vanos contiguos. En general en este tipo de problemas es muy importante evaluar la disipación de energía que se produce antes de la restitución del flujo de agua al río, ya que un mal diseño puede originar regímenes rápidos en la salida del cuenco amortiguador y una socavación en el lecho del río con la consecuente pérdida de materiales. Esto puede llevar a una pérdida de seguridad en la presa.

El diseño del cuenco amortiguador es fundamental en este proceso, y la evaluación de las pérdidas de energía muy difícil de obtener, especialmente si el aliviadero es escalonado, con pendiente variable, curva, reducción de sección etc.

El coste de realización de un modelo a escala en el total de la obra es muy reducido y se pueden obtener grandes beneficios, incluida la disminución del coste de ejecución al permitir optimizar el diseño. Hay que tener en cuenta que en el ejemplo expuesto es posible que tengan que pasar muchos años antes de llegar a la avenida de proyecto y quizá no se alcance nunca la avenida extrema (lo que mas bien sería deseable), con lo cual, si no se ha realizado antes un modelo difícilmente podremos comprender la importancia de estas situaciones. El modelo permite además, observar y medir, el comportamiento de situaciones más allá de las establecidas por la propia normativa, como pueden ser el funcionamiento simultaneo de todos los órganos de desagüe, la avería total o parcial de una o varias compuertas, etc. De esta forma el modelo servirá para establecer parte de las directivas contempladas en las normas de explotación que afectan directamente a la seguridad de la presa.

El problema se plantea en la forma de llevar a cabo esta reducción de escala de manera que el modelo se asemeje en comportamiento al prototipo al que quiere representar.

1.4.2. Tipos de semejanza

Se llama **Semejanza** a la relación existente entre una magnitud física en el prototipo y el modelo expresada en las mismas unidades. Se utiliza la variable λ para expresar esta relación de semejanza. Así:

$$\lambda_L = \frac{L_P}{L_m} \quad (1.39)$$

es la razón de semejanza entre dos longitudes de una misma medida en el prototipo (L_P) y el modelo (L_m).

Cada una de las magnitudes físicas del problema se reproducirá en el modelo a través de su relación de escala. Si esta es una magnitud derivada, se puede a su vez expresar en función de las fundamentales. Por ejemplo el caudal:

$$\lambda_Q = \frac{Q_P}{Q_m} = \frac{\frac{L_P^3}{t_P}}{\frac{L_m^3}{t_m}} = \frac{L_P^3}{L_m^3} \frac{t_P}{t_m} = \frac{\lambda_L^3}{\lambda_t} \quad (1.40)$$

siendo $\lambda_t = \frac{t_P}{t_m}$ la relación entre el tiempo utilizado en el prototipo y el modelo.

En un modelo tendremos una **semejanza mecánica** cuando tengamos la vez semejanza geométrica, cinemática y dinámica. A continuación se definen estos conceptos

Un modelo poseerá **semejanza geométrica** cuando todas las longitudes se encuentran afectadas por el mismo factor de escala λ_L . En este caso se respetarán los ángulos entre los distintos puntos del modelo.

Puede ser que un modelo posea una distorsión de escala geométrica entre la vertical y la horizontal. Entonces, se tendrían dos factores de escala λ_{Lh} y λ_{Lv} para cada una de las longitudes. En este caso solo se respetarán los ángulos comprendidos dentro de un mismo plano horizontal.

Un modelo más complejo, en el que intervengan otras unidades además de la longitud, como puede ser la velocidad, puede cumplir la existencia de una **semejanza cinemática** . En este caso los vectores velocidad del fluido en el prototipo son proporcionales a su vector velocidad correspondiente en el modelo, a este razón de proporcionalidad le denominaremos λ_v .

Cuando además existen fuerzas aplicadas al modelo es conveniente adoptar una **semejanza dinámica** , cuyo factor de proporcionalidad llamaremos λ_F . Este es un factor de proporcionalidad geométrica que se aplica entre el polígono de fuerzas actuantes sobre una partícula del prototipo y del modelo.

El problema en la mecánica de fluidos radica en operar de forma conjunta con todas las fuerzas. Estas se han introducido con anterioridad para explicar los interpretación física de las monomios adimensionales, y son:

F_g	Fuerzas de gravedad	$F_g = m \cdot g = \rho L^3 g$
F_p	Fuerzas de presión	$F_p = A \cdot \Delta p = \Delta p L^2$
F_μ	Fuerzas de viscosidad	$F_\nu = \mu \frac{dv}{dy} A = \mu \frac{v}{L} L^2 = \mu v L = \rho \nu v L$
F_E	Fuerzas debidas a la elasticidad (compresibilidad)	$F_E = E \cdot A = E \cdot L^2$
F_σ	Fuerzas debidas a la tensión superficial	$F_\sigma = \sigma L$
F_I	Fuerzas de inercia	$F_I = m \cdot g = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho L^4 T^{-2} = \rho v^2 L^2$

Las fuerzas de inercia son las que se oponen a la variación del movimiento por la aplicación de algunas de las fuerzas anteriores. La ecuación de equilibrio de fuerzas puede escribirse como:

$$\sum F = F_g + F_p + F_\mu + F_E + F_\tau = -F_I \quad \rightarrow \quad F_g + F_p + F_\mu + F_E + F_\tau + F_I = 0 \quad (1.41)$$

La dificultad radica en que no se puede mantener la semejanza dinámica para todas las fuerzas actuantes sobre el modelo hidráulico. Existen limitaciones que se presentan a la hora de poder variar mediante una relación de escala, algunos de los parámetros intervinientes en el problema. El ejemplo más claro es la gravedad, pero no el único, ya que la presión también es difícil alterarlo. Se ha podido realizar en algunos ensayos utilizando una cámara isobárica. La sustitución del fluido a ensayar por otro de distinta viscosidad mas ajustado a la reducción de escalas dependerá de la disponibilidad de éste para los volúmenes y caudales requeridos en el ensayo. Adicionalmente pueden ser necesarios equipos de bombeo capaces de manejar este fluido si hay que ponerlo en movimiento.

Observemos ahora los monomios adimensionales más habitualmente utilizados en los problemas de hidráulica, el número de Froude y el número de Reynolds dados en las ecuaciones (1.28) y (1.29) respectivamente. Si mantenemos las viscosidad del fluido, y evidentemente la gravedad, es imposible satisfacer de forma conjunta ambas ecuaciones. Esto implica que a la hora de realizar un modelo a

escala, debe evaluarse el fenómeno físico predominante, gravedad o viscosidad, y realizar el modelo sobre la base del mantenimiento de la relación predominante. Finalmente se comprobará que el error cometido con la simplificación realizada no tiene gran influencia en el modelo.

Por ejemplo en el caso de los modelos predominados por la gravedad, como es el caso del aliviadero anteriormente expuesto, la existencia de números de Reynolds elevados hace que la viscosidad pierda importancia. En cambio el hecho de que un modelo tenga un comportamiento laminar frente a un prototipo con comportamiento turbulento haría inadmisibles esta simplificación por que el cambio en las condiciones hidráulicas sería notable.

En los modelos en lámina libre donde se adopta para la transformación de escalas el número de Froude, habrá de tenerse en cuenta que no haya zonas donde el calado sea inferior a 3 *cm* ya que los fenómenos de tensión de superficial tendrían también gran importancia sobre el modelo.

Las dos razones anteriormente enunciadas hacen que la adopción de la escala más grande posible en función de la ubicación, caudales disponibles, etc, donde se vaya a realizar el ensayo, sea lo más favorable para reducir la influencia de estos fenómenos. Es evidente que una relación de escala de 1:1 entre prototipo y modelo consigue la semejanza perfecta entre ambos.

Como posible solución para mantener un flujo turbulento en un modelo a escala realizado con semejanza de Froude puede realizarse una distorsión de escala entre la horizontal y la vertical aumentando esta última de manera que las pérdidas de energía sean equivalentes. El disminuir la rugosidad ayuda también en este sentido pero suele ser difícil encontrar materiales lo suficientemente lisos.

1.4.3. Semejanza de Froude

Se utiliza cuando tenemos problemas con superficie libre donde las fuerzas predominantes son las gravitatorias. Como ejemplos pueden tenerse los problemas de oleaje, canales, vertederos, resaltos, desagües etc.

Supongamos que utilizamos λ para expresar la relación geométrica entre las dimensiones del prototipo L y del modelo L' :

$$\lambda = \frac{L}{L'} \quad (1.42)$$

El valor de λ es lo que constituye la relación de escala entre ambos. Ahora bien si utilizamos una semejanza de Froude estamos afirmando que el monomio adimensional dado por:

$$F^2 = \frac{v^2}{gL} \quad (1.43)$$

permanece constante entre el prototipo y el modelo. Ello implica que:

$$F^2 = \frac{v^2}{gL} = \frac{v'^2}{g'L'} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{v'^2} = \frac{g}{g'} \frac{L}{L'} \quad (1.44)$$

como no vamos a poder variar con facilidad las condiciones de gravedad (g) entre el prototipo y el

modelo, hemos supuesto ésta constante, lo que implica que:

$$\frac{g}{g'} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v^2}{v'^2} = \frac{L}{L'} = \frac{L}{\frac{L}{\lambda}} = \lambda \quad \rightarrow \quad \frac{v}{v'} = \sqrt{\lambda} \quad (1.45)$$

Conocida la longitud y la velocidad el tiempo es una magnitud derivada, por tanto:

$$t = \frac{L}{v} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{t'} = \frac{\frac{L}{v}}{\frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{v}{\sqrt{\lambda}}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda} \quad (1.46)$$

El caudal es una unidad derivada de la longitud (volumen) y el tiempo, dada por:

$$Q = \frac{L^3}{t} \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{Q'} = \frac{\frac{L^3}{t}}{\frac{\frac{L^3}{\lambda^3}}{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}} = \frac{\lambda^3}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda^5} \quad (1.47)$$

La única unidad fundamental que no hemos expresado es la masa (M), que si la obtenemos a través de la densidad (ρ) y el volumen (V) como:

$$M = \rho V \quad \rightarrow \quad \frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{L^3}{L'^3} = \frac{\rho}{\rho'} \lambda^3 \quad (1.48)$$

siendo ρ y ρ' las densidades en el prototipo y modelo respectivamente. En el caso de que el fluido sea el mismo, lo que es bastante habitual, se tendría la relación de escalas para la masa dada por:

$$\frac{M}{M'} = \lambda^3 \quad (1.49)$$

Ejemplo: Semejanza de Froude

Para ensayar el aliviadero de una presa se ha construido un modelo a escala 1:50. Calcule el rango de caudales en el modelo si los caudales a ensayar en la estructura real oscilan entre 1500 m^3/s y 2030 m^3/s . Obtenga además la rugosidad que debe tener el material del modelo para conservar el número de Manning si este es de 0,014 en el prototipo.

Las escalas utilizadas, sabiendo que ha de mantenerse el número de Froude, el valor de la gravedad y el fluido circulante (agua) tanto en el prototipo (p) como en el modelo (m), son:

$$\lambda_l = \frac{L_p}{L_m} = 50; \quad \frac{g_p}{g_m} = 1; \quad \frac{\rho_p}{\rho_m} = 1 \quad (1.50)$$

$$F^2 = \frac{v_p^2}{g_p L_p} = \frac{v_m^2}{g_m L_m} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \frac{v_p^2}{v_m^2} = \frac{g_p}{g_m} \frac{L_p}{L_m} = \lambda_l \quad \rightarrow \quad \frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\lambda_l} \quad (1.51)$$

Los caudales los obtenemos como $Q = VS$, por tanto:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{v_p}{v_m} \frac{L_p^2}{L_m^2} = \sqrt{\lambda} \lambda^2 = \sqrt{\lambda^5} = 50^{5/2} = 17677,67 \quad (1.52)$$

Finalmente, se tiene:

$$Q_m = \frac{Q_p}{50^{5/2}} \begin{cases} Q_{m1} = \frac{1500}{50^{5/2}} = 0,08485 \text{ m}^3/\text{s} = 84,85 \text{ l/s} \\ Q_{m2} = \frac{2030}{50^{5/2}} = 0,11483 \text{ m}^3/\text{s} = 114,83 \text{ l/s} \end{cases} \quad (1.53)$$

A continuación se comprobará la rugosidad que debería tener el material a utilizar en el modelo para que sea equivalente a la del prototipo.

$$\frac{n_p}{n_m} = \frac{v_m}{v_p} \sqrt{\frac{I_p R_{H_p}^{4/3}}{I_m R_{H_m}^{4/3}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda^{4/3}} = \lambda^{1/6} = 50^{1/6} = 1,9194 \quad (1.54)$$

$$n_m = \frac{n_p}{50^{1/6}} = \frac{0,014}{50^{1/6}} = 0,00723 \quad (1.55)$$

En caso de no poder conseguirse este material, puede distorsionarse la escala vertical para conseguir que la energía en el vertido permanezca constante entre el prototipo y el modelo.

1.4.4. Semejanza de Reynolds

La viscosidad es un fenómeno presente en todos los problemas hidráulicos, pero su importancia disminuye a medida que el contorno tiene menos importancia, como es el caso de las grandes masas de agua, o cuando tenemos números de Reynolds muy elevados, lo que es habitual en regímenes turbulentos desarrollados. En este caso, el valor de vD es muy grande frente a la viscosidad, y su variación no tendrá gran influencia en el problema a estudio. En el ábaco de Moody nos estaríamos moviendo en la zona horizontal donde apenas se produce variación en la f de Darcy.

Por el contrario, si en el prototipo estamos en un régimen turbulento y en el modelo se produjera régimen laminar, los errores cometidos podrían ser muy elevados invalidando la razón de semejanza adoptada.

De nuevo, se utilizará el valor de λ para expresar la relación de escala geométrica entre prototipo y modelo. Con la semejanza de Reynolds el monomio adimensional que permanece constante esta dado por:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \text{cte} \quad \rightarrow \quad \frac{v}{v'} = \frac{D'}{D} \frac{\nu}{\nu'} \quad (1.56)$$

Si el fluido entre prototipo y modelo es el mismo se tiene:

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v}{v'} = \frac{D'}{D} = \frac{1}{\lambda} \quad (1.57)$$

Igual que en el caso anterior, conocida la longitud y la velocidad el tiempo es una magnitud derivada, por tanto:

$$t = \frac{L}{v} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{t'} = \frac{\overline{L'}}{\overline{v}} = \frac{\lambda}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda^2 \quad (1.58)$$

El caudal es una unidad derivada de la longitud (volumen) y el tiempo, dada por:

$$Q = \frac{L^3}{t} \quad \rightarrow \quad \frac{Q}{Q'} = \frac{\frac{L^3}{t}}{\frac{L'^3}{t'}} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} = \lambda \quad (1.59)$$

La masa (M), se obtiene a través de la densidad (ρ) y el volumen (V) como:

$$M = \rho V \quad \rightarrow \quad \frac{M}{M'} = \frac{\rho L^3}{\rho' L'^3} = \frac{\rho}{\rho'} \lambda^3 \quad (1.60)$$

siendo ρ y ρ' las densidades en el prototipo y modelo respectivamente, que al ser el fluido el mismo, se tiene que la relación de escalas para la masa esta dada por:

$$\frac{M}{M'} = \lambda^3 \quad (1.61)$$

Ejemplo: Semejanza de Reynolds

Se quiere estudiar en un modelo a escala el comportamiento de un acuífero confinado, del que se quiere extraer un caudal de 100 l/s. Sabiendo que la permeabilidad k es en el prototipo es 10^{-5} . Calcular la permeabilidad que habrá que darle al modelo y el caudal extraído cuando la escala del modelo es 1:10.

Utilizando la relación de caudales obtenida anteriormente, se tiene:

$$Q_m = \frac{Q_p}{\lambda} = \frac{Q_p}{10} = \frac{100}{10} = 10 \text{ l/s} \quad (1.62)$$

La permeabilidad puede obtenerse de la relación dada en la Ley de Darcy:

$$Q = kS \frac{\Delta H}{L} \quad \rightarrow \quad k = \frac{QL}{S\Delta H} \quad \rightarrow \quad \frac{k_p}{k_m} = \frac{Q_p L_p S_m \Delta H_m}{Q_m L_m S_p \Delta H_p} = \lambda \lambda \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad (1.63)$$

Por tanto, debe disponerse de un material para realizar el modelo cuya permeabilidad sea:

$$k_m = \frac{k_p}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{k_p}{1/10} = 10^{-5} \cdot 10 = 10^{-4} \text{ m/s} \quad (1.64)$$

1.4.5. Relaciones de escala en problemas de semejanza

En la tabla 1.9 se describen las relaciones de escala cuando se adopta una semejanza de Froude, Reynolds, Weber o Mach para las magnitudes más habituales en la hidráulica, cuando se considera constante el valor de la gravedad (g) y se utiliza λ como coeficiente de escala geométrica

Magnitud física	Dimensión	Ley de semejanza adoptada			
		Froude	Reynolds	Weber	Match
Longitud	L	λ	λ	λ	λ
Area	L^2	λ^2	λ^2	λ^2	λ^2
Volumen	L^3	λ^3	λ^3	λ^3	λ^3
Tiempo	T	$\sqrt{\lambda}$	λ^2	λ	$\sqrt{\lambda^3}$
Velocidad	LT^{-1}	$\sqrt{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	1	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
Aceleración	LT^{-2}	1	$\frac{1}{\lambda^3}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Caudal	L^3T^{-1}	$\sqrt{\lambda^5}$	λ	λ^3	$\sqrt{\lambda^3}$
Presión	$ML^{-1}T^{-2}$	λ	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	$\frac{1}{\lambda}$
Energía	ML^2T^{-2}	λ^4	λ	λ^3	λ^2
Fuerza	MLT^{-2}	λ^3	1	λ^2	λ

Tabla 1.9: Relaciones de semejanza con distintas leyes